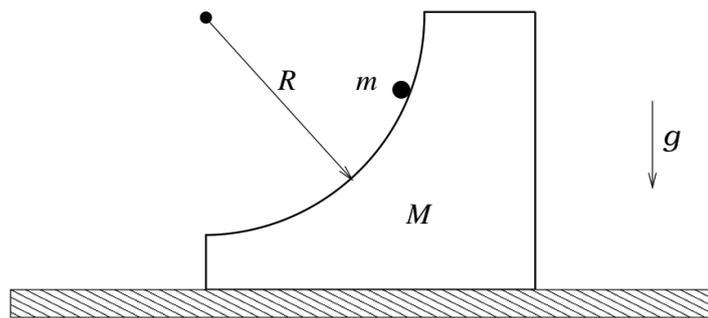


**Instituto de Física - UFF**  
**Mecânica Analítica - 2ºP/2012 - Prof. Daniel Jonathan**  
**Lista de Exercícios I - teste na sexta, 30/11**

- Um pêndulo elástico consiste numa massa  $m$  capaz de oscilar num plano vertical suspensa por uma mola de constante elástica  $k$  e comprimento natural  $l$ .
  - Escolhendo coordenadas generalizadas convenientes, obtenha a Lagrangiana e as equações de Lagrange.
  - Interprete o significado físico dos termos que aparecem nestas equações. Verifique ainda se seus resultados se reduzem apropriadamente aos casos de um pêndulo simples e/ou uma mola simples, caso se tome os limites adequados.
- Uma partícula de massa  $m$  desliza sem atrito ao longo de uma cunha de massa  $M$  e formato semicircular de raio  $R$ . A cunha, por sua vez, escorrega sem atrito ao longo de um plano horizontal. Escolhendo coordenadas generalizadas convenientes, obtenha a lagrangiana e as equações de movimento do sistema.



- Na eletrodinâmica de Weber, a força entre duas cargas elétricas puntiformes em movimento é dirigida ao longo da linha que as une e tem magnitude

$$F = \frac{ee'}{r^2} \left\{ 1 + \frac{r\ddot{r}}{c^2} - \frac{\dot{r}^2}{2c^2} \right\},$$

onde  $r$  é a distância entre as cargas. Determine o potencial generalizado  $U(r, r')$  associado a esta força.

- Considere a chamada máquina de Atwood oscilante (v. fig) - ( $M$  só se move verticalmente). Usando as coordenadas indicadas na figura, mostre que (a menos de uma constante que pode ser descartada porque não afeta as equações de Lagrange) a lagrangiana é

$$L = \frac{m + M}{2} \dot{r}^2 + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - gr(M - m \cos \theta)$$

e escreva as equações de Lagrange.

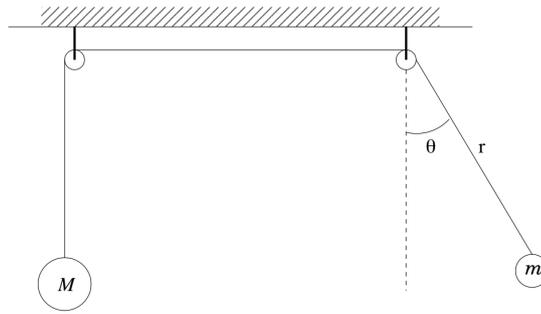
- Considere o Exemplo 1.5.1 do livro-texto (página 26) no caso em que todas as massas são iguais ( $m_1 = m_2 = m_3 = m$ ) e o sistema é liberado a partir do repouso com  $x_2 = 0$  e  $x_3 = l$ , onde  $l$  é o comprimento natural da mola.

(a) Resolva as equações de movimento do sistema que estão na página 27 do livro-texto e prove que

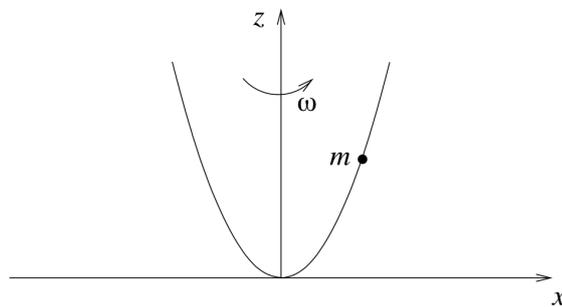
$$x_2(t) = \frac{2mg}{9k}(\cos \omega t - 1) + \frac{gt^2}{6}, \omega = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$$

donde  $\dot{x}_2(t) = (g/3\omega)(\omega t - \text{sen } \omega t)$ .

(b) Prove que  $\dot{x}_2(t) > 0$  para todo  $t > 0$  e conclua que o fio sempre permanece esticado. Isto justifica, a posteriori, o uso das equações de movimento da página 27.



6. Uma conta de massa  $m$  está restrita a mover-se ao longo de um arame rígido e liso. O arame está num plano vertical, num campo gravitacional uniforme  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$ , e tem a forma de uma parábola cuja equação é  $z = x^2/2R$ , onde  $R$  é uma constante positiva. Se o arame é posto a girar com velocidade angular constante  $\omega$  em torno do eixo vertical  $z$ , obtenha a lagrangiana e as equações de Lagrange para a conta.



7. Utilizando a função de dissipação de Rayleigh, obtenha as equações de movimento para um pêndulo duplo (exemplo 1.2.4, p. 11 e 1.5.3, p.28) no caso em que levamos também em conta forças de dissipação  $\mathbf{F}_i = -k\mathbf{v}_i$  linearmente proporcionais à velocidade de cada massa.